EUCLIDES

MAANDBLAD
VOOR DE DIDACTIEK VAN DE WISKUNDE

ORGAAN VAN
DE VERENIGINGEN WIMECOS EN LIWENAGEL
EN VAN DE WISKUNDE-WERKGROEP VAN DE W.V.O.

MET VASTE MEDEWERKING VAN VELE WISKUNDIGEN
IN BINNEN- EN BUITENLAND

42e JAARGANG 1966/1967

IV — 15 DECEMBER 1966

INHOUD

P. NOORDHOFF NV — GRONINGEN

Het tijdschrift **Euclides** verschijnt in tien afleveringen per jaar. Prijs per jaargang *f* 8,75; voor hen die tevens geabonneerd zijn op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde is de prijs *f* 7,50.

De leden van *Wimecos* krijgen *Euclides* toegezonden als officieel orgaan van hun vereniging. De contributie bedraagt f 9,00 (abonnement inbegrepen), over te schrijven naar postrekening 143917, ten name van Wimecos, Amsterdam. Het verenigingsjaar begint op 1 sept.

De leden van *Liwenagel* krijgen *Euclides* toegezonden voorzover ze de wens daartoe te kennen geven aan de Penningmeester van Liwenagel te Amersfoort; postrekening 87185.

Hetzelfde geldt voor de leden van de *Wiskunde-werkgroep van de W.V.O.* Zij kunnen zich wenden tot de penningmeester van de Wiskunde-werkgroep W.V.O. te Haarlem; postrekening 614418.

Indien geen opzegging heeft plaatsgehad en bij het aangaan van het abonnement niets naders is bepaald omtrent de termijn, wordt aangenomen, dat men het abonnement continueert.

Boeken ter bespreking en aankondiging aan Dr. W. A. M. Burgers te Wassenaar.

Artikelen ter opname aan Dr. Joh. H. Wansink te Arnhem.

Opgaven voor de „kalender" in het volgend nummer binnen drie dagen na het verschijnen van dit nummer in te zenden aan Drs. A. M. Koldijk, Joh. de Wittlaan 14 te Hoogezand.

Aan de schrijvers van artikelen worden gratis 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt; voor meer afdrukken overlegge men met de uitgever.

MODERN WISKUNDE-ONDERWIJS IN SCHOTLAND
(Een verslag van een studiereis)

Werkgroep wiskunde-onderwijs h.a.v.o.

In 1965 werd door de „Drie Pedagogische Centra" (het Katholiek Pedagogisch Bureau, het Christelijk Pedagogisch Studiecentrum en het Onderwijskundig Studiecentrum) een werkgroep in het leven geroepen voor het wiskunde-onderwijs aan het h.a.v.o. Als doel van de werkgroep werd gesteld het opstellen en uitwerken van een wiskundeleerplan voor het h.a.v.o., dat rekening houdt met de moderne tendenzen in de wiskunde en de wiskunde-didactiek.

De werkgroep en het boek „Modern Mathematics for Schools"

Tijdens de besprekingen over het concept van een leerplan maakte de werkgroep door bemiddeling van J. B. Wolters' Uitgeversmaatschappij kennis met de Schotse leergang „Modern Mathematics for Schools", uitgegeven door Blackie (Glasgow, London) en Chambers (Edinburgh). Deze leergang werd geschreven door een team van 17 leraren en enkele inspecteurs en beproefd op ongeveer 7000 leerlingen. De werkgroep was reeds van mening, dat het opstellen van een leerplan gevolgd zou moeten worden door een uitwerking daarvan in details, omdat alleen daardoor dit leerplan op zijn merites beoordeeld zou kunnen worden. Praktisch gesproken zou dat neerkomen op het schrijven van een leerboek. Dat zou echter veel tijd kosten. Toen bleek, dat de Schotse leergang in zeer veel opzichten overeenkwam met de inzichten van de werkgroep werd besloten te stimuleren, dat deze methode zou worden vertaald en bewerkt. Er werd een commissie bereid gevonden deze bewerking op zich te nemen. Er werd door deze commissie snel gewerkt. Daardoor werd bereikt dat in de cursus 1966–67 een aantal scholen kan starten met deel I in experimentele vorm. Ongeveer 2500 leerlingen zullen het boek dan gebruiken. Als titel van de leergang werd gekozen „Moderne wiskunde voor Algemeen Voortgezet Onderwijs".

Bezoek aan Schotland

Enkele leden van de werkgroep en de commissie van vertalers hebben op uitnodiging van de Nederlandse en Schotse uitgevers van 15 tot en met 19 mei 1966 een bezoek gebracht aan Schotland. Ze

voerden daar gesprekken met een aantal leden van H.M. Inspectorate en van de Scottish Mathematics Group, die de methode ontwierp en schreef. Verder werd het gebruik van het boek bestudeerd in enkele scholen, nl. Stirling High School, Lenzie Academy en Jordanhill College School en werd een bezoek gebracht aan het Glasgow Educational Television Centre, waar een schooltelevisieprogramma in gesloten circuit wordt verzorgd, gebaseerd op de methode „Modern Mathematics for Schools".

Indeling van het Schotse Onderwijs

Alvorens in te gaan op de methode en op de tijdens de bijgewoonde lessen opgedane indrukken, is het wenselijk enige algemene opmerkingen over het onderwijs in Schotland te maken. Voor uitvoeriger informatie kan worden verwezen naar het recente onderwijsverslag „Education in Scotland in 1965", in mei 1966 aan het Parlement uitgebracht door de voor het onderwijs in Schotland verantwoordelijke Secretary of State for Scotland.

De leerplicht begint op vijfjarige leeftijd. De kinderen gaan dan naar de Primary School. Ze verlaten deze op een leeftijd van 11½ tot 12½ jaar en gaan dan allen naar een Secondary School. Sinds 1939 dragen alle scholen, die onderwijs geven, volgend op het basisonderwijs, deze naam. Dat het mogelijk zou zijn op deze leeftijd reeds de leerlingen naar begaafdheid in „streams" in te delen, gelooft men niet (meer). Aan het oordeel van het hoofd van de lagere school wordt meer waarde gehecht dan aan examens of tests.

Er zijn Certificate en Non-Certificate Schools (ook Senior en Junior Secondary Schools genoemd). De eerste leiden in cursussen van 4, 5 of 6 jaar op voor het Scottish Certificate of Education (S.C.E.), dat in zijn geheel of per vak kan worden afgelegd op 2 niveaus, nl. Ordinary Grade of Higher Grade. Van de 29502 kandidaten, die zich in 1965 voor een examen op H.G. aanmeldden, hadden er 1551 geen enkel succes, 3207 slaagden alleen op O.G. en 24744 behaalden voor tenminste één vak de Higher Grade.

Op de Junior Secondary Schools wordt geen examen afgenomen. Deze scholen met een driejarige cursus bevatten elementen van ons v.g.l.o., u.l.o., lager technisch en lager landbouw- en huishoudonderwijs. De belangstelling voor de Certificate Courses is stijgend sinds in 1962 een examen op Ordinary niveau werd ingevoerd om te voorzien in de behoeften van vele leerlingen, die de Higher Grade niet kunnen halen. Of men in Schotland een examen van nog eenvoudiger karakter zal invoeren, zoals in Engeland heeft plaatsgevonden onder de naam C.S.E. (Certificate Secondary Education)

moet nog worden afgewacht.

Bepalen we ons verder tot de Senior Secondary Schools met een type leerlingen, dat bij ons scholen voor m.a.v.o., h.a.v.o. en v.w.o. zal bezoeken. In dit schooltype treffen we tenminste 30 procent aan van de leerlingen, die de lagere school verlaten. Bij hun intrede in de eerste klas worden de leerlingen op grond van een voorselectie op basis van de gegevens van de lagere school ingedeeld in klassen, die zoveel mogelijk homogeen zijn. Doubleren komt slechts in bijzondere gevallen, zoals langdurige ziekte van de leerling, voor. De leerlingen blijven twee jaar bijeen. Daarna vindt een hergroepering plaats. De ene groep richt zich rechtstreeks op het examen Higher Grade na 5 jaar. De andere groep op het examen Ordinary Grade na 4 jaar, met de mogelijkheid daarna de studie voor de Higher Grade in enkele vakken voort te zetten.

Men kan ook na het examen Higher Grade (in de „sixth form") de studie, speciaal in de wiskunde, voortzetten om zich nog beter op het universitaire onderwijs in de wiskunde voor te bereiden of een betere kans te maken bij een examen ter verkrijging van een beurs.

Er worden per week 6 lessen van 35 of 40 minuten in de wiskunde gegeven, in de lagere klassen verdeeld in twee lessen rekenen, twee algebra en twee meetkunde. Per week geeft men 1600 minuten les, de zaterdag is vrij.

Onderwijzers, leraren, inspecteurs

De onderwijzers van de lagere scholen krijgen in Schotland een (driejarige) universitaire opleiding. De onderwijzeressen kunnen echter met een driejarige opleiding op een College of Education volstaan. De leraren aan de Senior Secondary Schools volgen na een vierjarige studie op een universiteit een eenjarige cursus aan een College of Education in opvoedkunde, psychologie, didactiek en methodiek. Tijdens deze cursus doen ze praktisch werk in de scholen gedurende twee dagen per week. Men kan de universitaire studie voortzetten om na een jaar of twee te promoveren, maar dit doen slechts weinig leraren.

Er is in Schotland geen kloof tussen „leraren" en „onderwijzers", zoals bij ons. Dit geldt ook voor de inspectie. Een inspecteur bezoekt de lagere scholen geheel en de middelbare scholen voor bepaalde vakken, waarin hij zich heeft gespecialiseerd. Andere hebben speciale taken.

Bezoek aan de inspectie

De commissie (bestaande uit de heren Ir. M. Ververs van J.B.

Wolters, E. H. Schmidt, inspecteur voor het u.l.o. te Amsterdam, W. J. Kniep, leraar te Amsterdam en G. Krooshof, leraar te Groningen) werd ontvangen in het Scottish Education Department, gevestigd in het St. Andrews House te Edinburgh. Men sprak daar met vier inspecteurs, onder wie de Chief Inspector en inspecteur Mr. A.G. Robertson, voorzitter van de commissie van inspecteurs, die zich speciaal met het onderwijs in de wiskunde bezig houden. Hij kan als de inspirator van de vernieuwing van het wiskunde-onderwijs in Schotland beschouwd worden. Bij de bezoeken aan de scholen werd de Nederlandse commissie voortdurend door hem vergezeld. Bij de besprekingen met de inspecteurs bleek, dat de aandrang tot vernieuwing van het wiskunde-onderwijs niet was uitgegaan van de universiteiten maar van de leraren. De publikaties van de O.E.E.C. (Organization for European Economic Cooperation) o.a. „New Thinking in School Mathematics" en „Synopses for modern secondary School mathematics" hebben daarbij grote invloed gehad. Men is er zich van bewust, dat de modernisering zich niet tot het vervolgonderwijs kan beperken. Ook het rekenonderwijs op de basisschool dient in studie te worden genomen. Een vooruitstrevend ontwerp-leerplan voor „mathematics" in het wijdere verband van „Environmental Studies" komt voor in de belangwekkende uitgave van het Scottish Education Department „Primary Education in Scotland" (1965). De manier, waarop deze publikatie tot stand kwam is typerend voor de wijze, waarop men in Schotland te werk gaat: een commissie bestaande uit inspecteurs en docenten van lagere scholen en kweekscholen heeft het boek geschreven.

Zo is ook de methode „Modern Mathematics for Schools" tot stand gekomen. Men heeft geredeneerd: een leerplan is niet voldoende, geef de leraren een boek in handen, waarmee ze kunnen werken. Cursussen zijn gegeven ter introductie van de nieuwe leerstof en de nieuwe didactiek. De methode nu in 75 procent van de Certificate Courses in gebruik genomen, werd aanvankelijk in een experimentele vorm beproefd. Deze werd uitgegeven door het Scottish Education Department.

Er werd geëxperimenteerd in 15 scholen (pilotschools) en 45 scholen (outer-ringschools) waarin slechts enkele onderdelen werden beproefd. De docenten van de pilotschools werden leiders van studiekringen, waarin de docenten van de andere scholen werden ingeleid in de moderne leerstof.

In 1963 begon een commissie, ingesteld door het Scottish Education Department, bestaande uit de hoofdleraren van de pilotschools en twee Colleges of Education en vier inspecteurs, met de voorbe-

reiding van een alternatief examenprogramma in de wiskunde. Op basis van het nieuwe leerplan zal in 1968 en 1969 voor het eerst algemeen worden geëxamineerd voor de Ordinary- resp. Higher Grade. Een jaar eerder zullen enkele experimenteerscholen deze examens mogen afnemen. Verwacht wordt, dat het eerste jaar 25 procent van de kandidaten en het tweede jaar reeds 75 procent het nieuwe examenprogramma zal kiezen.

Bezoeken aan de scholen

Stirling High School te Stirling. Een der outer-ring-scholen. De hoofdleraar voor wiskunde in deze school Mr. T. K. McIntyre was lid van de Scottish Mathematics Group. Opvallend was in deze school de hoeveelheid demonstratiemateriaal in de vorm van tekeningen, gaatjesboard met plastic doppen, modellen van meetkundige figuren, bijv. beweegbare parallellogrammen en vliegers, stereometrische lichamen, een eenvoudige binair rekenapparaat (door een der leerlingen zelf vervaardigd), tabellen, schema's en overzichten op grote gekleurde kartonnen, enz. Alles was erop gericht de jonge leerlingen de meetkunde en de algebra zo aanschouwelijk mogelijk te presenteren. Later zou blijken hoe hierdoor de verkregen kennis goed in het geheugen blijft. Inspecteur Robertson overhoorde nl. leerstof, die in het voorafgaande jaar behandeld was. De leerlingen reageerden levendig en gaven goede antwoorden. In een tweede klas werd een les bijgewoond over het oplossen van twee vergelijkingen met twee onbekenden. Het probleem werd benaderd met behulp van verzamelingen van getallenparen. De leerlingen moesten de grafieken behorende bij de vergelijkingen tekenen. Het bleek, dat ze vertrouwd waren met het begrip oplossingsverzameling (solution set) en deze konden beschouwen als doorsnede van de twee verzamelingen van geordende paren.

Aan Mr. McIntyre werd gevraagd, hoe het met de zelfwerkzaamheid van de leerlingen bij het gebruik van deze methode was gesteld. Hij meende, dat dit nog een moeilijke zaak was. De leerlingen noteerden te gebrekkig, wat ze waarnamen, om een goede leiding te kunnen missen. De inspecteur was van mening, dat in de hogere leerjaren de zelfwerkzaamheid kan toenemen. In de eerste leerjaren is een actieve begeleiding en observatie door de docent noodzakelijk.

Lenzie-Academy te Lenzie. Een der pilotschools. De hoofdleraar voor wiskunde Mr. Clark was de leider van afdeling rekenkunde in de Scottish Mathematics Group. In een eerste klas werd een les bijgewoond over het rekenen met het binaire stelsel. De leerlingen hadden ,,abaci'' gemaakt met behulp van erwten of kralen. Ze rekenden

er vlug en handig mee. Een „levend rekenapparaat" werd gevormd door een groep leerlingen voor de klas. Er werd binair mee opgeteld en vermenigvuldigd. In een tweede klas werd een les van Mr. Clark bijgewoond. Hij noteerde op het bord $(x|x < 5)$ en vroeg de leerlingen deze verzameling af te beelden. Prompt kwam de vraag naar het universum, waaruit de waarden van x gekozen moesten worden. Hieruit bleek duidelijk, dat het begrip universum in deze klas begrepen was. In deze tweede klas werd nog even gedemonstreerd hoe de leerlingen met de rekenliniaal konden omgaan. Van een cirkel werd de straal gegeven. De omtrek werd door de leerlingen berekend. Het vinden van de plaats van de komma, het benaderen van het antwoord door een ruwe schatting, het afronden op enkele decimalen, enz. ging de meeste leerlingen goed af. Mr. Clark bleek een enthousiast leraar, die zijn leerlingen sterk wist te boeien.

Jordanhill College School te Glasgow. Eveneens een pilotschool. De gastheer was hier Mr. R. A. Finlayson, lid van de Scottish mathematics Group en speciaal betrokken bij de afdeling meetkunde. Met hem werd een uitvoerig gesprek gevoerd over het doel van het meetkunde-onderwijs. Als doel voor de beide eerste leerjaren zag hij „understanding of shapes", voor het derde leerjaar „understanding of proof". Dit laatste kwam hoofdzakelijk neer op het kunnen onderscheiden van definities en stellingen en het overzien van de samenhang der stellingen in een klein gebied van de meetkunde. De „understanding of shapes" kan vooral bereikt worden door de meetkundige figuren in een rooster te laten tekenen en er de afbeeldingen spiegelen, draaien, verschuiven, enz. op te laten toepassen. Deze manier van aanpakken geeft bovendien een goede voorbereiding voor de analytische meetkunde.

In deze school werd een les van de schooltelevisie bijgewoond. Hierover meer in het hoofdstuk over deze televisieuitzendingen.

De algemene indruk over het gebruik van de nieuwe methode in de bezochte scholen is zeer gunstig. Alle leraren, waarvan lessen werden bijgewoond, waren van mening, dat de methode een grote vooruitgang betekende. De leerlingen blijken dat, wat ze geleerd hebben, beter te onthouden. Ze tonen dikwijls veel interesse, hetgeen zich o.a. uit in het vrijwillig maken van moeilijke modellen en apparaten en het thuis al van te voren doorwerken van een deel van de leerstof. Ook bleek, dat leerlingen, die een tijdlang ziek geweest waren, gemakkelijk in staat waren het gemiste in te halen.

De leerboeken

Een der leidende principes, waarvan men is uitgegaan bij het op-

stellen van het leerplan en het schrijven van de boeken, is geweest, dat *alle* leerlingen, dus van elke ,,stream" in staat moesten zijn de wiskundelessen te volgen en deze interessant moesten vinden. Bovendien moesten de lessen een voldoende basis verschaffen voor hen, die later in een wiskundige richting verder zouden willen studeren. Terwijl de Nederlandse docenten, die met de boeken kennis maakten, meenden, dat deze in de eerste plaats voor het h.a.v.o. geschikt zouden zijn en waarschijnlijk ook voor het m.a.v.o., zijn ze in Schotland juist geschreven met het oog op de ,,bovenste 40 procent" van de leerlingen, waarbij dus bij ons ook de v.w.o.-leerlingen zouden behoren. De beste leerlingen krijgen daar dezelfde leerstof als de minder goede. Ze gaan er echter dieper op in. Ook is voor hen het oefenmateriaal wat moeilijker.

De auteurs geven de volgende samenvatting van de leergang:

1. Die twintigste-eeuwse onderwerpen zijn er in opgenomen, die voor de leerlingen interessant en bruikbaar zijn. Daarbij werd zorgvuldig in het oog gehouden welke wiskunde de leerlingen in de toekomst nodig hebben.

2. De onderwerpen uit de nieuwe wiskunde zijn zodanig gemengd met de traditionele, dat er een evenwichtige opbouw is verkregen. Daarin hebben zowel praktisch werk (rekenen met de rekenliniaal of -machine bijv.) als het ontdekken van nieuwe begrippen en het toepassen daarvan een plaats gekregen.

3. De nadruk is gelegd op die onderwerpen, die de verschillende onderdelen van de wiskunde met elkaar verbinden (Zie de lijst hieronder). De cursus is daardoor meer efficiënt, maakt een sterkere indruk op de leerlingen en verdiept het inzicht.

4. De opzet van de boeken is er op gericht de leerlingen tot actief denken en handelen te brengen. Ze worden aangemoedigd zelf te experimenteren. Natuurlijk zijn ,,chalk and talk" nog belangrijke elementen van het *onderwijs*-proces, maar in de boeken wordt een grotere nadruk gelegd op de *leer*situatie waarin de leerlingen geplaatst moeten worden en waarin ze veel zelf moeten doen.

Lijst van de onder 3 bedoelde ,,verbindende onderwerpen".

1. De taal van de verzamelingenleer – in de algebra, de meetkunde en het rekenen.
2. Getallensystemen – vooral in de algebra en het rekenen.
3. Relaties, afbeeldingen en functies – in de algebra, de meetkunde (transformaties), de goniometrie en het rekenen.

4. Coördinaten en grafieken – in de meetkunde, de algebra, de goniometrie en het rekenen.
5. Logica en deductief redeneren – in de algebra en in het bijzonder in de meetkunde.
6. In elk der onderdelen zijn onderwerpen opgenomen, die als voorbereiding kunnen worden beschouwd van studieonderwerpen op hoger niveau, bijv. van de verdere studie van afbeeldingen en functies, infinitesimaalrekening, matrices, groepen, rijen, vectoren, bewijsmethoden, enz.

In de meetkunde heeft men niet getracht een deductief systeem op te bouwen, dat berust op een aantal bekende axioma's. Fundamenteel in deze cursus zijn twee „eigenschappen" van de rechthoeken:
a. Elke rechthoek past 4 maal in zijn „opening", nl. 2 keer met zijn voorkant boven en 2 keer met zijn achterkant boven.
b. Men kan een plat vlak vullen met een betegeling van congruente rechthoeken.

Men heeft de verschillende onderwerpen in de boeken nogal uitvoerig uitgewerkt (vooral de meetkundige) om de leraren daarmee te laten zien, hoe ze de nieuwe stof kunnen aanbieden en laten bediscussiëren.

Het gebruik van televisie bij het invoeren van de nieuwe methode

In Glasgow heeft de groep, die de methode Modern Mathematics for Schools voorbereidde een machtig hulpmiddel gevonden in het gebruik van een gesloten televisiecircuit, waarop 307 scholen zijn aangesloten, waaronder 54 secondary schools. De kabels voor dit circuit konden gelegd worden in de buizen, waarin oorspronkelijk voor de nu opgeheven Glasgowse elektrische tram de leidingen door de stad waren gelegd.

De bedoeling van de schooltelevisieuitzendingen aan de hand van de methode is in de eerste plaats de leraren te laten zien, hoe de lessen gegeven kunnen worden. De lessen worden gegeven door leraren van de pilotschools (for teachers by teachers). De directeur van deze schooltelevisiestichting is een der principal teachers of mathematics, die voor dit doel door de gemeente werd vrijgesteld van zijn schoolwerk.

Elke dag worden drie programma's uitgezonden, nl. voor algebra, meetkunde en rekenen voor de eerste klassen van de secondary schools. Deze programma's worden uitgezonden om 10.15, 11.40 en 2.10 en duren 20 minuten. Ze worden gedurende vijf dagen in de week op wisselende tijdstippen herhaald, zodat elke leraar in

staat is ze zo goed mogelijk in zijn lessenschema in te passen. Elke dinsdag krijgen de leraren de gelegenheid de lessen, die in de volgende week worden uitgezonden, vooruit te zien.

Aan elk onderdeel algebra, meetkunde en rekenen worden per jaar 38 lessen gewijd. Het volgende jaar zullen lessen voor de tweede klassen worden uitgezonden. Van de lessen voor de eerste klas worden er dan nog drie per week in het programma opgenomen. De samenstelling van één programma kost 400 pond sterling, hetgeen, naar de directie verzekerde, een laag bedrag was vergeleken met de kosten, die de B.B.C. voor een dergelijk programma maakt.

De leraar, die de televisieles geeft, krijgt natuurlijk de beschikking over allerlei hulpmiddelen, die juist bij de televisie zo gemakkelijk ter beschikking staan, bijv. bewegende beelden. Maar de opzet is toch de lessen heel eenvoudig te houden en bijvoorbeeld niet te laten onderbreken door stukken film van gebeurtenissen buiten de school. Er wordt geen gebruik gemaakt van een klas voor de camera, omdat gebleken is, dat de toekijkende leerlingen zich dan door de leerlingen op het scherm van het onderwerp laten afleiden.

In verschillende t.v.-lessen wordt de leraar voor de klas bij de les ingeschakeld, bijvoorbeeld doordat de presentator de opdracht geeft:„tell your teacher . . ." Er volgt dan een korte pauze. In de klas gingen dan dadelijk de vingers omhoog. Wanneer de leraar dadelijk reageerde kon hij een leerling het antwoord laten geven vóór het door de presentator werd genoemd. Ook kan hij sommige ingelaste pauzes gebruiken om de leerlingen zelf een vraag te stellen of enkele afgedwaalde schaapjes weer bij de les te halen. (Een les over het binaire stelsel, die door de commissie werd bijgewoond, gaf aanleiding tot het schrijven van een artikel voor de komende jaargang[1]) van het wiskundetijdschrift Pythagoras).

De kosten van deze uitzendingen worden gedragen door de Educational Authority te Glasgow. Met veel energie hebben de Glasgowse leraren en in het bijzonder de huidige directeur Mr. H.S. Wylie de verwezenlijking van hun plannen in deze richting doorgezet. Natuurlijk was niet iedere leraar even enthousiast over de t.v.-uitzendingen. Het is dan ook heel moeilijk deze geschikt te maken voor de hele brede laag van leerlingen, die de eerste klassen bevolken. Deze eerste klassen zijn meestal ingedeeld in drie „streams", wat onvermijdelijk tempoverschillen met zich meebrengt. De grote waarde van de televisielessen is echter, dat ze de leraren stimuleren hun lessen aantrekkelijk te maken en daarbij gebruik te maken van eenvoudige hulpmiddelen.

---

[1]) Jaargang 1966—1967.

JOHN WALLIS

Wallis, die 350 jaar geleden, op 23 november 1616, te Ashford in Kent geboren werd, is in de geschiedenis der wiskunde bekend gebleven door het naar hem genoemde oneindige produkt voor π. Na studie in de theologie te Cambridge werd hij in 1640 tot geestelijke gewijd. In 1653 werd hij doctor in de theologie en in 1660 hofkapelaan van de op de troon teruggekeerde Charles II.

Wallis was een zeer bekwaam wiskundige. Vanaf 1649 tot zijn overlijden (Oxford, 28 oktober 1703) bezette hij de door Sir Henry Savile in 1619 te Oxford gestichte leerstoel voor wiskunde. Zijn verzamelde werken beslaan drie dikke foliobanden.

In *Arithmetica infinitorum, sive nova methodus inquirendi in curvilineorum quadraturam, aliaque difficiliora matheseos problemata* (rekenkunde van oneindigheden, of een nieuwe methode om oppervlakten te onderzoeken van kromlijnig begrensde figuren, en andere moeilijkere wiskundige problemen) van 1655 komt het oneindige produkt voor π voor. Het „nieuwe" in de titel slaat hierop, dat Wallis geheel rekenkundig te werk wil gaan. Als verhouding van de oppervlakten van het omgeschreven vierkant van een cirkel en van die cirkel zelf vindt hij:

$$\frac{4}{\pi} = \frac{3.3.5.5.7.7.\ldots}{2.4.4.6.6.8.\ldots}$$

Bij de overgang naar oneindig ging Wallis in zijn berekeningen nogal „inductief" te werk. Vandaar, dat er wel twijfel aan de juistheid van zijn resultaten bestond, met name bijv. van Huygens wat betreft het oneindige produkt voor π. Deze twijfel kon weggenomen worden door Lord William Brouncker, beschermheer van Wallis (en eerste voorzitter van de Royal Society, waarvan o.a. Wallis in 1662 medeoprichter was), die uit het zeer langzaam convergerend produkt een benadering voor π berekende.

De sectionibus conicis, nova methodo expositis, tractatus (verhandeling over de kegelsneden, op een nieuwe manier), ook van 1655, geeft toepassing der algebra op de meetkunde der kegelsneden, analytische meetkunde dus. Vooraan in dit werk leest men: „. . .$1/\infty$, sive aliquota pars infinite parva; (esto enim ∞ nota numeri infiniti)" (. . . $1/\infty$, of enig ander oneindig klein deel; ∞ zal het teken voor oneindig zijn). Aan Wallis danken we dus ons symbool ∞. Het is aannemelijk, dat hij ertoe gekomen is uit oudere handschriften, waarin het Romeinse cijferteken M (1000) nogal eens ongeveer als ∞ voorkomt.

A. J. E. M. Smeur

HOE WERKT MEN MET EEN COMPUTER?

(gedeelte van een voordracht gehouden voor de vereniging WIMECOS op dinsdag 2-11-1965 te Eindhoven)

door

Ir. W. NIJENHUIS

Natuurkundig Laboratorium der
N.V. Philips' Gloeilampenfabrieken
Eindhoven-Nederland

Wij zullen hier een toelichting geven op het voorbereiden van een vraagstuk voor berekening door een automatische rekenmachine. Wij zullen dat doen aan de hand van een zeer eenvoudig voorbeeld, n.l. het berekenen van de vierkantswortel uit een positief getal a.

Elk vraagstuk dat men door een automatische rekenmachine wil laten oplossen, moet daartoe eerst in numerieke vorm worden gebracht. Voor de meeste technische vraagstukken is dit geen probleem: ze zijn reeds van numerieke aard. Voor meetkundige of topologische vraagstukken is het vaak wel een moeilijkheid, soms zelfs de grootste moeilijkheid, om een geschikte numerieke beschrijving van het vraagstuk te vinden.

In ons vraagstuk van het berekenen van $\sqrt{a}$ zou men slechts behoeven op te merken te doen te hebben met het geval van het bepalen van een nulpunt van een gegeven functie — in dit geval de

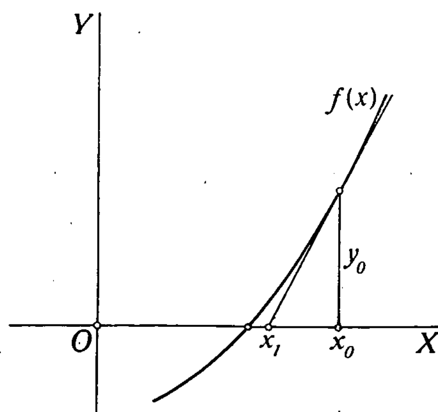


fig. 1.

functie $y = x^2 - a$. Eén methode om een nulpunt van een functie te bepalen is de methode van Newton[1]). Deze zegt, dat als $x = x_0$ een schatting van het nulpunt voorstelt, dat dan

$$x_1 = x_0 - y_0/y_0'$$

in veel gevallen een betere schatting voorstelt. Hierin zijn y_0 en y_0' de ordinaat resp. de afgeleide van de functie voor de waarde x_0. Men ziet dit gemakkelijk uit fig. 1.

De herhaalde toepassing van deze formule levert niet altijd een convergerende rij van x-waarden. In ons voorbeeld vindt men door toepassing van de formule van Newton

$$x_1 = x_0 - (x_0^2 - a)/2x_0 = \tfrac{1}{2}(x_0 + a/x_0)$$

of, in het algemeen, de iteratieformule

$$x_{n+1} = \tfrac{1}{2}(x_n + a/x_n),$$

waarvan men de convergentie als volgt inziet:

De grafische voorstelling van de functie

$$y = \tfrac{1}{2}(x + a/x)$$

is een hyperbool met tot asymptoten de y-as en de lijn $y = \frac{1}{2}x$, zie fig. 2. De lijn $y = x$ snijdt deze kromme in het laagste punt dat

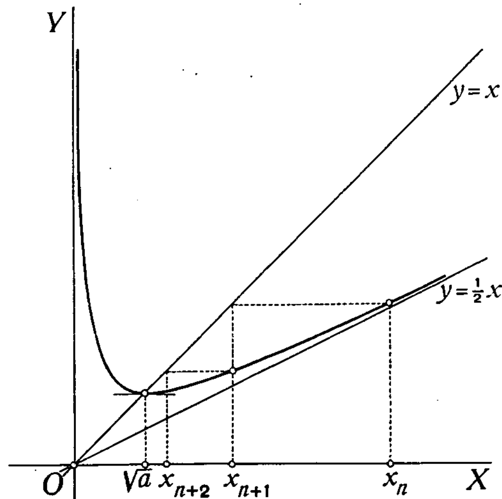


fig. 2.

[1]) Zie bijv. Dr. Fred Schuh, *Lessen over Hogere Algebra*, dl. I, p. 475, ev.

juist bij $x = \sqrt{a}$ ligt (wij bekijken alleen de positieve tak van de hyperbool). De constructie van x_{n+1} uit x_n blijkt duidelijk uit de figuur, waarin men ziet dat de gezochte waarde $\sqrt{a}$ van de positieve kant benaderd wordt, mits men met $x_0 > \sqrt{a}$ begint. Was de eerste schatting kleiner dan $\sqrt{a}$ geweest, dan zijn pas de volgende schattingen groter dan $\sqrt{a}$, en geldt het hierboven gezegde pas voor elke volgende schatting. De benadering is kwadratisch, want heeft x_n een relatieve afwijking ε, dan heeft x_{n+1} een relatieve afwijking van de orde $\frac{1}{2}\,\varepsilon^2$ [1]). Dit wil zeggen dat het aantal gevonden cijfers in elke stap ongeveer verdubbelt. Tevens blijkt dat $x_n - x_{n+1}$ een goede maat voor de nog aanwezige afwijking in x_n voorstelt.

Nu wij de rekenmethode hebben geanalyseerd, zouden wij met behulp van een der tegenwoordig meestal gebruikte „programmeertalen", waarop wij nog terug komen, het vraagstuk aan de machine kunnen toevoeren. Daar het ons hier echter te doen is om ook de interne werking van zo'n rekenmachine te illustreren zullen wij het programma in machine-taal schrijven, zoals dat in het verleden steeds nodig was.

Wij zullen ons voorstellen over een machine te beschikken waarmee de volgende operaties kunnen worden uitgevoerd. Het register van het rekenorgaan waarin de bewerkingen geschieden en de resultaten achterblijven zullen wij A noemen. De inhoud van dit register en de inhoud van adres n, d.i. van geheugenvak nummer n, zullen wij met (A) resp. (n) aangeven.

De beschikbare instructies zijn:

OPA n;	optellen bij A; (A) wordt vervangen door (A) + (n).
AFA n;	aftrekken van A; (A) wordt vervangen door (A) — (n).
VMG n;	vermenigvuldig; (A) wordt vervangen door (A) × (n).
DLN n;	delen; (A) wordt vervangen door (A)/(n).
HIA n;	haal in A; (n) wordt in A gecopieerd.
BAP n;	berg A positief weg; (A) wordt gecopieerd op adres n.
SPR n;	spring naar n; ga uitvoeren de instructie die op adres n staat.
SAP n;	spring als (A) > 0 naar de instructie op adres n, ga anders gewoon door.
SAN n;	spring als (A) ≦ 0 is.
STP;	stop.

[1]) Stel $x_n = \sqrt{a}(1+\varepsilon)$ dan is $x_{n+1} = \frac{1}{2}\sqrt{a}\left(1+\varepsilon+\frac{1}{1+\varepsilon}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{a}(2+\varepsilon^2\ldots)$ $\cong \sqrt{a}(1+\frac{1}{2}\varepsilon^2)$.

Wij gaan nu eerst de iteratieformule programmeren. Geven wij (geheel willekeurig) aan a en x de geheugenadressen 10 en 11 en aan de constante $\frac{1}{2}$ het adres 12, dan luidt dit stuk programma:

HIA 10	$(A) = a$
DLN 11	$(A) = a/x$
OPA 11	$(A) = x + a/x$
VMG 12	$(A) = \frac{1}{2}(x + a/x)$

Indien wij nu met:

BAP 11

de nieuwe x op de plaats van de oude zouden zetten, zouden wij de oude waarde kwijt zijn en zouden wij de test op de bereikte nauwkeurigheid niet meer kunnen verrichten. Deze moet dus eerst geschieden. Stel, de gewenste tolerantie e staat op adres 13. Ook hebben wij een adres als werkruimte nodig en nemen daarvoor adres 14. Wij vervolgen nu met:

BAP 14	$(A) = (14) = x_{n+1}$
AFA 11	$(A) = x_{n+1} - x_n$ (< 0)
OPA 13	$(A) = x_{n+1} - x_n + e$

Het resultaat $x_{n+1} - x_n + e$ zal in het algemeen negatief zijn en pas als de vereiste nauwkeurigheid bereikt is positief worden. Wij beginnen dus aan een nieuwe iteratie door terug te springen naar het begin van het programma met:

SAN . . .

Aan het begin van het programma moet nu echter eerst x_{n+1} op zijn plaats worden gezet, zodat wij in totaal krijgen:

20.	HIA 14	$(A) = x_{n+1}$
21.	BAP 11	x_{n+1} vervangt x_n
22.	HIA 10	$(A) = a$
23.	DLN 11	$(A) = a/x_n$
24.	OPA 11	$(A) = a/x_n + x_n$
25.	VMG 12	$(A) = x_{n+1}$
26.	BAP 14	$(14) = x_{n+1}$
27.	AFA 11	$(A) = x_{n+1} - x_n$
28.	OPA 13	$(A) = x_{n+1} - x_n + e$
29.	SAN 20	Als $(A) \leqq 0$, spring naar 20
30.	STP	Stop

De instructies zijn hier (willekeurig) op de adressen 20 en volgende in het geheugen geplaatst. Een fout in het programma is de kwestie van de beginschatting: Is de beginschatting voor x op adres 11 toevallig $< \sqrt{a}$, dan valt de test in opdracht 29 meteen positief uit en eindigt de berekening nog voor zij goed is begonnen. Daarom beginnen wij met de beginwaarde $x_0 = \frac{1}{2}(1 + a)$. Wij plaatsen de constante „1" op adres 15 en vangen aan met:

16.	HIA 15	$(A) = 1$
17.	OPA 10	$(A) = 1 + a$
18.	VMG 12	$(A) = \frac{1}{2}(1 + a)$
19.	SPR 21	Ga door op 21.

Het programma is nu geheel gereed. Men gaat gemakkelijk na, dat het bijv. voor $a = 17$ en met $e = 0{,}01$, als opeenvolgende benaderingen geeft: 9,000; 5,444; 4,283 en 4,126. Het programma kan echter nog iets korter en wel door direct $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}(a/x_n - x_n)$ uit te rekenen. Het geheel ziet er dan als volgt uit (het programma vangt aan op adres 16):

	Programma	Toelichting
10.	„a"	
11.	„x"	
12.	„$\frac{1}{2}$"	
13.	„e"	
14.		
15.	„1"	
16.	HIA 15	$(A) = 1$
17.	OPA 10	$(A) = 1 + a$
18.	VMG 12	$(A) = \frac{1}{2}(1 + a)$
19.	SPR 22	
20.	AFA 13	$(A) = x_{n+1} - x_n$
21.	OPA 11	$(A) = x_{n+1}$
22.	BAP 11	x_{n+1} vervangt x_n
23.	HIA 10	$(A) = a$
24.	DLN 11	$(A) = a/x_n$
25.	AFA 11	$(A) = a/x_n - x_n$
26.	VMG 12	$(A) = x_{n+1} - x_n$
27.	OPA 13	$(A) = x_{n+1} - x_n + e$
28.	SAN 20	Als $(A) \leqq 0$ spring naar 20
29.	STP	Stop

Voor machines met een klein geheugen kan deze winst van twee geheugenplaatsen belangrijk zijn. Het betekent ook een kleine tijdwinst, daar de iteratie-cyclus één instructie korter is. Bij een werkelijke uitvoering van deze berekeningen met een automatische rekenmachine zijn nog 2 stukken programma nodig, een zgn. „invoerprogramma" dat het geheugen vult, in ons geval de adressen 10 t/m 29 van hun inhoud voorziet, en een zgn. „uitvoerprogramma" dat de resultaten zichtbaar maakt, in ons geval de inhoud van adres 11 uittypt. Dit zijn echter nog betrekkelijk ingewikkelde programma's, waarop wij hier niet willen ingaan.

Wij moeten opmerken dat wij in het bovenstaande eigenlijk al zijn afgeweken van de zuivere „machine-code" omdat wij het bewerkingsdeel van de instructies niet de getalvorm gaven die intern in de machine wordt gebruikt, maar een naamcode die gemakkelijker te onthouden is. Het programma wordt ook werkelijk in deze code in ponskaarten of in papierband geponst. Dit impliceert dat bij invoer in de machine een vertaal-programma aanwezig moet zijn dat de geponste code in de machine-code omzet. Deze gedachte voortzettend heeft men getracht het programmeren steeds gemakkelijker te maken en steeds dichter te laten aansluiten bij de gangbare wiskundige formulering, hetgeen culmineerde in het gebruik van „programmeer-talen". Dit houdt echter in, dat één zgn. „statement" in de programmeertaal meestal met een heel stuk programma in de machinetaal zal overeenkomen. Eén der meest geavanceerde talen is ALGOL 60 (Algorithmic language 1960). In deze taal mag men vrijwel de normale wiskundige formules schrijven.

Hierin zou ons programma er als volgt kunnen uitzien:

begin real $a, x, d, e;$
$a :=$ read; $e :=$ read; $x := (1 + a)/2;$
L: $d := (a/x - x)/2;$ $x := x + d;$
if $d + e \leqq 0$ **then go to** L; print (x)
end

Het programma bestaat uit „statements" die door een puntkomma worden gescheiden. Bij elkaar behorende stukken worden door de „statement brackets" **begin** en **end** omsloten. Een „declaratie — **real** $a, x, d, e;$ — aan het begin vertelt over welke variabelen het gaat. Met „a: = read" is hier bedoeld dat dit getal apart wordt toegevoerd aan de machine, met „print (x)" dat een antwoord wordt uitgetypt. L is een „label" waar naartoe men kan springen. Het „wordt-teken": = zegt dat de variabele in het linkerlid een

nieuwe waarde krijgt. **Vet gedrukte woorden** zijn gestandaardiseerde ALGOL-symbolen [1]). Het gehele te voren beschreven programma is equivalent met de middelste drie statements.

Een ALGOL-programma is bijna zonder meer leesbaar. Het is dan ook een reeds veel gebruikt middel om wiskundige procédés nauwkeurig te omschrijven. Daar echter het door de machine werkelijk uit te voeren programma steeds een programma blijft in machine-code, betekent dit dat bij gebruik van een programmeertaal de machine zelf steeds een uitgebreide vertaalfase doorloopt, waarin hij uit de programmeertaal een machine-taalprogramma samenstelt. Pas daarna wordt dit machine-taalprogramma werkelijk uitgevoerd.

LITERATUUR

[1]) Zie bijv. Dr. E. W. Dijkstra, *Cursus Programmeren in ALGOL* 60, uitg. Stichting Mathematisch Centrum, 2e Boerhaavestraat 49, Amsterdam.

WISKUNDIG GENOOTSCHAP

De winterbijeenkomst van het Wiskundig Genootschap wordt ditmaal gehouden op 3 januari 1967 in het Triniteitslyceum, Zijlweg 203, Haarlem. Als thema werd gekozen „*Onderwijs en Rekenmachine*". Het programma ziet er als volgt uit:

10.15	Opening door de Voorzitter.
10.30-11.30	Voordracht door Prof. dr. A. van der Sluis. Titel is nog niet bekend.
11.45-12.45	Voordracht door prof. dr. A. van Wijngaarden: „*De taal van mens en computer*".
13.00-14.00	Lunchpauze.
14.00-15.00	Voordracht door Prof. dr. M. Euwe: „*Kennis van computer en automatisering als vak bij het Middelbaar Onderwijs*".

De mogelijkheid bestaat op 3 januari 1967 de lunch te gebruiken in het Triniteitslyceum. Zij die daarvan gebruik wensen te maken dienen uiterlijk op 15 december een bedrag van *f* 4,50 te hebben overgemaakt op giro 191628 t.n.v. C. J. Alders te Haarlem.

Alle belangstellenden zijn van harte welkom.

Dr. A. W. Grootendorst,
secretaris.

KORREL CXXXVI
$C_1 + kC_2 = 0.$

Met grote voldoening las ik op blz. 4 van de 8e druk van de „*250 Opgaven*": bij het oplossen van de vraagstukken moet men uitsluitend reële getallen beschouwen. Dus weg met imaginaire cirkels; weg met: „dan stelt de vergelijking een onbestaanbare cirkel voor, die uit *onbestaanbare* punten *bestaat*".

Wordt er met deze beperking tot reële getallen wel voldoende rekening gehouden bij de behandeling van cirkels en cirkelbundels in de analytische meetkunde?

Ik geef hieronder enige citaten uit leerboeken, die betrekking hebben op de behandeling van de vergelijking $C_1 + \lambda C_2 = 0$ van een cirkelbundel.

1) De cirkels $C_1 = x^2 + y^2 + a_1x + b_1y + c_1 = 0$ (1)

en

$$C_2 = x^2 + y^2 + a_2x + b_2y + c_2 = 0 \quad (2)$$

bepalen de cirkelbundel $C_1 + \lambda C_2 = 0$ of

$$(1 + \lambda)(x^2 + y^2) + (a_1 + \lambda a_2)x + (b_1 + \lambda b_2)y + c_1 + \lambda c_2 = 0.$$

Dit stelt voor *elke* waarde van λ (behalve $\lambda = -1$) weer een cirkel voor; het stelsel is dus een cirkelbundel".

Dit is fout. Wij nemen een heel eenvoudig voorbeeld:

$$x^2 + y^2 - 10 + \lambda(x^2 + y^2 - 25) = 0 \text{ of}$$

$$x^2 + y^2 + \frac{-10-25\lambda}{1 + \lambda} = 0.$$

Als de derde term hiervan positief is, dan komt er geen cirkel; dit is het geval voor $-1 < \lambda < -\frac{2}{5}$; neem maar eens $\lambda = -\frac{1}{2}$; dan krijgen we $x^2 + y^2 - 10 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2 - 25) = 0$ of $x^2 + y^2 + 5=0$.

2) Het tweede leerboek neemt enkel het geval, dat de gegeven cirkels $C_1 = 0$ en $C_2 = 0$ elkaar snijden. Wegens de beperking tot snijdende cirkels is de zaak niet in orde.

3) $C_1 + kC_2 = 0$ is de verkorte schrijfwijze voor

$$x^2 + y^2 + a_1x + b_1y + c_1 + k(x^2 + y^2 + a_2 x + b_2y + c_2) = 0$$

of

$$(1 + k)x^2 + (1 + k)y^2 + (a_1 + ka_2)x + (b_1 + kb_2)y + c_1 + kc_2 = 0.$$

$C_1 + kC_2 = 0$ stelt voor iedere waarde van k een cirkel voor.
Dit wordt zo maar gezegd; maar *het is fout*; we nemen een getallenvoorbeeld:

$$C_1 = x^2 + y^2 - 4x - 5 = 0 \text{ en } C_2 = x^2 + y^2 + 6x + 8 = 0$$
$$C_1 + kC_2 = (1 + k)(x^2 + y^2) + 2x(3k - 2) + 8k - 5 = 0 \text{ of}$$
$$x^2 + y^2 + 2x \times \frac{3k - 2}{k + 1} + \frac{8k - 5}{k + 1} = 0.$$

Dit is een cirkel, als $\left(\frac{3k - 2}{k + 1}\right)^2 \geqq \frac{8k - 5}{k + 1}$ is of

$k^2 - 15k + 9 \geqq 0$ of $(k - 7\frac{1}{2})^2 \geqq 47\frac{1}{4}$.

In gehele getallen: als k links ligt van 1 of rechts van 14; dus . . ., -5, -4, -3, -2, -1, 0 en 15, 16, 17, 18, . . . Neem $k = -4$, wel een cirkel; $k = 7$, geen cirkel; $k = 17$, wel een cirkel.

4) In een vierde boek:

De verg. $x^2 + y^2 + a_1x + b_1y + c_1 + \lambda(x^2 + y^2 + a_2x + b_2y + c_2) = 0$ of $C_1 + \lambda C_2 = 0$ stelt voor elke λ, behalve voor $\lambda = -1$ een cirkel voor. *Fout*; zie nr 3 hierboven.

5) Heeft men twee cirkels:

$$C_1 = x^2 + y^2 + a_1x + b_1y + c_1 = 0$$
$$\text{en } C_2 = x^2 + y^2 + a_2x + b_2y + c_2 = 0,$$

dan kan men hun vergelijkingen verenigen tot de lineaire combinatie

31) $C_1 + kC_2 = 0$ of uitvoeriger
31a) $(1 + k)x^2 + (1 + k)y^2 + (a_1 + ka_2)x + (b_1 + kb_2)y + (c_1 + kc_2) = 0$,

waarin k een zekere factor (parameter) betekent.
Aan de vorm van (31a) is dadelijk te zien, dat de verkregen vergelijking weer een cirkel voorstelt.
Dezelfde fout als de schrijvers van 1, 3 en 4.
De hele zaak is deze: $x^2 + y^2 + p^2 = 0$ is geen cirkel;
$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + q^2 = 0$ is geen ellips.

Amsterdam P. Wijdenes

VERSCHEIDENHEDEN

door

Prof. dr. O. BOTTEMA

Delft

LXV. *Wis- en weerkunde.*

Met een variant op een in onze dagen gebruikelijke karakteristiek van de steeds voortschrijdende specialisatie, zou men kunnen zeggen dat een eeuw geleden de mannen der wetenschap minder wisten van méér. Een treffend bewijs ervoor, hoe breed destijds nog het gebied van kennis en onderzoek kon zijn, door één mens te overzien, is ons altijd de figuur van C. H. D. Buys Ballot (1817—1890) voorgekomen. Deze veelzijdige man kon de grondslagen leggen voor de beoefening van de wetenschappelijke meteorologie in ons land, het instituut tot stand brengen dat sindsdien daarvan het centrum is gebleven en de wet uitspreken die zijn naam draagt — in de periode (die twintig jaren duurde) dat hij als hoogleraar in de *wiskunde* verbonden was aan de universiteit te Utrecht.

Toen Buys Ballot zijn academische studie begon — hij werd in 1835 als student ingeschreven — verkeerde ons land in vrijwel elk opzicht, politiek, economisch, cultureel, in een dieptepunt van zijn geschiedenis, in een periode van inactiviteit, van gebrek aan durf en belangstelling. De geestelijke malaise strekte zich ook uit tot de exacte wetenschap, die zich behoudens enkele uitzonderingen, op een niveau bevond verre beneden het internationale peil. De faculteiten der wis- en natuurkunde waren daarbij ook kwantitatief bezien weinig belangrijk. Die in Utrecht telde destijds vijf hoogleraren en ongeveer vijftig studenten op een totaal van vijfhonderd. Bepaald armzalig lijken ons op ruim een eeuw afstand de materiële omstandigheden. In 1840 beschikten noch de chemie noch de fysica over enige laboratoriumruimte en de betrokken docenten gaven hun colleges thuis.

Te meer mogen wij er ons verheugd over verwonderen dat de begaafdheid van Buys Ballot zeer spoedig is gezien en erkend en dat men zich ten duidelijkste heeft ingespannen hem, voor zover de universitaire constellatie dat toeliet, een wetenschappelijke positie te verschaffen die een mogelijkheid van ontplooiing inhield. Hoe-

wel ook zijn omstandigheden lange tijd weinig bevredigend waren zijn hem de vele verdrietelijkheden als van de Leidse astronoom Kaiser of — in wat latere tijd — de tragische teleurstelling van Thomas Stieltjes bespaard gebleven.

Buys Ballot studeerde aanvankelijk letteren en deed daarvoor in 1838 het kandidaatsexamen. Doordat hij in 1836 intussen ook voor het zogenaamde Groot Mathesis was geslaagd kon hij overgaan naar de wis- en natuurkunde, waar hij in 1839 het kandidaats en enige jaren later het doctoraal aflegde om in 1844 te promoveren op een proefschrift over cohesie en adhesie. Zijn eerste wetenschappelijke publikaties, over scheikundige onderwerpen, dateren van 1842.

Het is natuurlijk niet de bedoeling hier een levensschets van Buys Ballot te geven. Daarvoor kunnen wij verwijzen naar de vrij recente biografie van Van Everdingen [1]), een eenvoudig en wat monotoon, maar degelijk en leesbaar geschrift dat uiteraard de nadruk legt op zijn grote betekenis voor de meteorologie. Uit dit boek blijkt, dat de autoriteiten, die na de promotie er naar streefden de veelbelovende jonge man voor de universiteit te behouden een weg volgden die ons wat kan verwonderen: hij werd in 1846 lector in mineralogie en geologie, een jaar later in de „theoretische chemie" en weer een jaar later buitengewoon hoogleraar in de wiskunde. Dat bleef hij tien jaar: in 1857 viel zijn benoeming tot gewoon hoogleraar — in hetzelfde vak; weer tien jaar later volgde hij van Rees op als hoogleraar in de natuurkunde. Er stak in deze benoemingspolitiek naast goede wil blijkbaar veel opportunisme en een vreemd schuiven met beschikbare plaatsen. Toen Buys Ballot de wiskunde kreeg toebedeeld had hij in dit vak nog geen enkele prestatie verricht. Zelfs in de bij zijn dissertatie gevoegde stellingen komt de mathesis niet aan de orde. Hoewel hij relatief jong was lijkt toch dertig jaar een gevorderde leeftijd om er mee te beginnen. Meer dan als een roeping schijnt hij de wiskunde ervaren te hebben als een plicht en ook als een belemmering tot het volgen der ware neigingen. Veel later schrijft hij [2]): „want O die mathesisjaren; wat hebben zij mij een leemte bezorgd in mijne chemische kennis". Als wij dan nog vernemen dat hij een matig en weinig helder docent was moeten wij wel vaststellen dat de gang van zaken niet zeer gelukkig is geweest. In de rede waarmee op 16 november 1847 het ambt wordt aanvaard kan men

---

[1]) E. van Everdingen, C. H. D. Buys Ballot ('s-Gravenhage, 1953).
[2]) T.a.p. p. 39.

in zijn verklaring tot de curatoren dat hij met zijn studenten hoopt „op te groeijen in kennis" een toespeling zien op de situatie, maar het geheel der toespraken wordt overspoeld met de retorica van zijn tijd en de „edele jongelingen, academieburgers" hebben hem de wiskunde horen vergelijken met een tempel, die geen valse versierselen draagt; elk deel ziet men het aan hoe het bevestigd is, zijn zuilen zijn van graniet, elk gewelf is onwankelbaar.

Van de rede zelf, met de eigenaardige titel *Het karakter der rede; uitgedrukt in de wiskunde* is allereerst merkwaardig dat zij in het Nederlands is gesteld. De filosoof Opzoomer had in 1846 aan dezelfde universiteit opzien gebaard en aanstoot gegeven door in de landstaal te oreren. Wij merken daarbij op dat niet alleen de dissertatie van Buys Ballot, maar ook de veel latere rectorale redevoering van 1864 het Latijn tot voertaal hebben.

De rede van 1847 is een in goede stijl geschreven, zij het een door de taal van die tijd wat vermoeiend betoog over de betekenis van de *ratio* in de wetenschap, waarbij als haar kenmerken eenheid, noodzakelijkheid en waarheid worden gezien, de wiskunde als het meest zuivere voorbeeld van toepassing der rede nader wordt uitgewerkt en de doorvoering der mathematische denkwijze in de natuurwetenschap wordt vastgesteld (met als voorbeelden de mechanica, de astronomie en verschillende hoofdstukken der fysica) of bepleit (voor de chemie en de mineralogie).

Zoals men ziet heeft de kern van de rede nog niet aan actualiteit ingeboet en men moet bewondering hebben voor de breedheid van blik en de filosofische bezinning op logica en methodologie waarvan de jonge hoogleraar blijk geeft. Ook zijn opmerkingen over de wiskunde zelf zijn, gezien in historisch perspectief, boeiend en getuigend van de grondigheid waarmee hij zich voor zijn taak heeft voorbereid. Van de onbewijsbaarheid van het parallellenaxioma schijnt hij overtuigd te zijn en hij memoreert de meningsverschillen over de stelling 28 in Boek XI der *Elementen* (betrekking hebbend op inhouden van prisma's). Wat de analyse aangaat vermeldt hij een aantal vragen van de dag betreffende de betrouwbaarheid der imaginaire getallen en de grondslagen der infinitesimaalrekening en „hoe nu kortelings, door Cauchy voornamelijk, de beginselen bewezen zijn". Hij waarschuwt tegen ondoordacht gebruik van oneindige processen: „zolang nog met behulp der reeksen steeds ware stellingen verkregen waren, heeft men er weinig op gelet, welke gevaarlijke en onzekere middelen men bezigde". Behalve Cauchy noemt hij van contemporaine mathematici Poisson en Liouville; Gausz wordt niet vermeld en men krijgt de indruk dat hij zich meer

op de Franse literatuur gericht heeft.

In de twintigjarige periode van werkzaamheid als hoogleraar in de wiskunde, door de voortreffelijke inaugurele rede ingeleid, heeft Buys Ballot hard gewerkt en veel gepubliceerd op het gebied van schei- en natuurkunde in het algemeen, en van meteorologie, klimatologie en oceanografie in het bijzonder, maar nauwelijks iets over de wetenschap van de door hem beklede leerstoel. Aan afzonderlijke artikelen vonden wij slechts een „bijdrage tot het onderkennen van de imaginaire wortels in eene hoogere machtsvergelijking" van 1858 (met de grondgedachte dat er zéker imaginaire wortels zijn als de som van de kwadraten of van de bikwadraten der wortels — uit te drukken in de coëfficiënten — negatief is), „iets over het vinden van de deelers der getallen" van 1862 en over „de vergelijkingen tusschen de zijde en de diagonalen van een regelmatigen n-hoek" uit 1864.

Zijn belangrijkste prestatie op wiskundig gebied is een leerboek *Beginselen en gronden der meetkunde. Handleiding bij hooger onderwijs*, dat blijkbaar gewaardeerd werd, want na de eerste editie van omstreeks 1850, volgde in 1855 een tweede en in 1860 een derde druk. De inhoud is beperkt tot elementaire planimetrie en tot de gewone trigonometrie (welke laatste eindigt met de oplossing door Schellbach van het vraagstuk van Malfatti). De schrijver toont ook hier de filosofische kant van zijn wezen. Een langdurige inleiding houdt zich bezig met begrippen als axioma, bewijs en deductieve methode. Om zijn stijl te typeren citeren wij een passage bij het begrip *bepaling*: „Men kan te wijdloopig zijn door het opnoemen van eenige eigenschap, die reeds in de vorigen opgesloten is en dus achterwege had kunnen blijven; dat zou wel geen sieraad zijn, maar toch geene fout. Het verraadt gebrek aan opmerkzaamheid, maar schaadt der waarheid niet". Uit kritische opmerkingen over de negatie en het *tertium non datur* en over woorden als grens, uitgebreidheid, richting, afstand en continuïteit blijkt hoezeer Buys Ballot zijn tijd vooruit was, zoals dat ook al aan het licht was gekomen bij een in zijn tijd weinig gewaardeerd geschrift (*„Schets eener Physiologie van het onbewerktuigde rijk der Natuur*, 1849) over moleculaire theorieën en het energie-beginsel. De inhoud aan meetkundige begrippen in het boek gaat hier en daar uit boven de *Elementen*; de behandeling der harmonische ligging, de pooltheorie voor een cirkel, de onderscheiding tussen vierpunt en vierzijd laten zien dat de auteur de voor zijn tijd nieuwe ontwikkeling van de projectieve meetkunde heeft gevolgd. „Een nieuwe weg ligt voor ons", schrijft hij op blz. 191, „waarop duizende meetkundige waar-

heden kunnen ontdekt worden. Tot de merkwaardige stellingen en ontwikkelingen van Pascal, Brianchon, Steiner is de toegang ontsloten, waardoor dadelijk elke stelling hare wederkeerige medebrengt, elke waarheid oogenblikkelijk verdubbeld wordt".

Het is niet als mathematicus, dat Buys Ballot, jaren lang hoogleraar in de wiskunde, zal voortleven, maar als grondlegger der meteorologie en in het bijzonder door zijn wet over de afwijking van de richting van de wind ten opzichte van het drukverval in de atmosfeer. Wie vragenderwijs veronderstelt dat een geest als de zijne deze regel gevonden zal hebben op grond van de rede, als uitvloeisel van de theorema's der mechanica, de aswenteling der aarde en de versnelling van Coriolis, kan bij Van Everdingen [1]) enige paradoxale antwoorden lezen: in de betreffende publikatie van 1857 is van de *richting* van de wind in het geheel geen sprake maar van haar intensiteit; in het artikel worden conclusies getrokken op grond van waarnemingsreeksen; het effect was al enige jaren eerder langs theoretische weg afgeleid door Ferrel, wiens prioriteit door onze landgenoot volledig is erkend.

Wij zien nog eens dat ook in de natuurwetenschap de gang der gedachte grillig kan zijn en de naamgeving der vondsten arbitrair en onbillijk. Ferrel schreef veel later, in 1886, hoffelijk en blijkbaar sans rancune over „Buys Ballot's law": „the law has been too long and too well known by the latter designation to change it now".

CENTRE BELGE DE PEDAGOGIE DE LA MATHEMATIQUE

2ème STAGE INTERNATIONAL DE KNOKKE
(van 4 tot 8 mei 1967)

Thema: *L'Analyse dans l'enseignement secondaire*

Medewerking is toegezegd door: Mevr. Gilberte Capiaux (België), Prof. Dr. W. Engel (B.R.D.), Prof. Dr. Hartig (D.D.R.), Mej. Danielle Incolle (België), Mevr. Frédérique Papy (België), Prof. G. Papy (België), Mej. Monique Parker (België), Br. Marc Smets (België), Dr. H. G. Steiner (B.R.D.).

U kunt nu reeds inschrijven bij de heer Kris de Munter, 183 avenue Brugmann, Brussel 6 (sluitdatum 15 april 1967). Het is mogelijk dat voor een hotelkamer gezorgd wordt; in dat geval dient men aan te geven of men met of zonder bad verlangt, en welke prijsklasse men wenst (300-400 BFrs, 400-500 BFrs, 500-600 BFrs). De inschrijfkosten bedragen BFrs 200, die men moet overmaken naar de Belgische postrekening 30210 t.n.v. Centre Belge de Pédagogie, 183 avenue Brugmann, Brussel-6.

De voertaal schijnt Frans te zijn.

---

[1]) T.a.p. p. 85.

WIMECOS

AGENDA VAN DE JAARVERGADERING 1966 VAN WIMECOS

op woensdag 28 december in „Esplanade", Lucas Bolwerk, Utrecht

Aanvang 10.30 uur.

1. Opening door de voorzitter, dr. ir. B. Groeneveld
2. Notulen van de algemene vergadering 1965
3. Jaarverslagen
3.1 van de secretaris*
3.2 van de penningmeester
3.3 van de kascommissie*
3.4 van de redactie van „Euclides"*
3.5 van de commissie voor de leesportefeuille*
4. Decharge van de penningmeester en benoeming van de nieuwe kascommissie
5. Bestuursverkiezing. wegens periodiek aftreden van de heren B. Groeneveld en A. J. Th. Maassen. Het bestuur stelt beide aftredenden kandidaat.
6. Voorstel van het bestuur tot vaststelling van de contributie voor 1967/1968 op *f* 9.—.
7. Voordracht van Prof. dr. J. H. de Boer, hoogleraar aan de Katholieke Universiteit van Nijmegen, over „*Eliminatie*"

   Pauze
8. Voordracht van de Heer W. J. Kniep, leraar te Amsterdam, over „*De Schotse methode van het wiskunde-onderwijs*"
9. Rondvraag
10. Sluiting

REDACTIEVERSLAG 41e JAARGANG VAN EUCLIDES

Aan de besturen van Wimecos,
Liwenagel en de
Wiskundewerkgroep van de WVO

De redactie van Euclides heeft in de 41e jaargang het beleid, in de vorige gevolgd, voortgezet. Helaas moet vastgesteld worden, dat er maar weinig bijdragen van lezers spontaan werden toegezonden.

Uiteraard is het te begrijpen, dat men aarzelt met het schrijven van artikelen over „moderne" leerstof. Er is in het algemeen bij het onderwijs nog weinig ervaring daarmee. Zelfs bij de experimenterende scholen is die nog zeer gering. Didactische vondsten heeft men dan ook nog niet of nauwelijks kunnen toetsen. Dat neemt niet weg, dat men een mening kan hebben over de wijze waarop men iets nieuws zou kunnen brengen. De redactie hoopt nu in het komende jaar tal van kortere en langere bijdragen van die aard te ontvangen.

Ook suggesties voor te behandelen onderwerpen — al schrijft men zelf niet — zijn welkom.

De jaargang-41 verscheen in 10 nummers met totaal 320 bladzijden. De redactie was samengesteld als het jaar ervoor. De samenwerking met de firma Noordhoff was goed.

12 november 1966

Namens de redactie
w.g. J. H. Wansink, voorzitter
w.g. A. M. Koldijk, secretaris

---

* In dit nummer afgedrukt.

NOTULEN VAN DE ALGEMENE VERGADERING VAN WIMECOS op 28 december 1965 in „Esplanade" te Utrecht.

Om 10.30 uur opent de voorzitter, dr. ir. B. Groeneveld, de vergadering. Hij heet alle aanwezigen hartelijk welkom, in het bijzonder de ereleden prof. dr. O. Bottema, dr. J. H. Wansink en P. Wijdenes, de inspecteur-generaal van het onderwijs Mr. Ir. M. Goote, de inspecteurs dr. H. A. Gribnau, dr. D. N. van der Neut en drs. B. J. Westerhof, de vertegenwoordigers van de zusterorganisaties, dr. Th. J. Korthagen (Liwenagel), drs. H. C. Vernout (Werkgroep WVO), de redactiesecretaris van „Euclides" drs. A. M. Koldijk en de sprekers, prof. dr. F. van der Blij en dr. P. Bronkhorst.

Bericht van verhindering was binnengekomen van dr. J. B. Drewes, raadadviseur in algemene dienst, dr. J. A. A. Verlinden, chef van de hoofdafdeling VHMO, dr. W. H. Capel, inspecteur van het onderwijs, G. J. J. Boost (Leesportefeuille van Wimecos), drs. B. Kleefstra, lid van de kascommissie 1964-1965, van P. J. Visser, conrector Rijksatheneum, Lochem, van Velines en van Velibi.

De presentielijst blijkt door 88 leden getekend te zijn.

De voorzitter begint zijn jaarrede met op te merken dat de vreugde om het veertigjarig bestaan van Wimecos overschaduwd wordt door het plotseling overlijden van de penningmeester drs. J. D. de Jong; staande aanhoort de vergadering de woorden van vriendschap en waardering die de voorzitter wijdt aan de persoon van Jan de Jong en de woorden van dank die hij uitspreekt voor al hetgeen de overledene voor de vereniging heeft gedaan; de aanwezigen herdenken gedurende enkele ogenblikken in stilte de overledene.

De jaarrede van de voorzitter zal in „Euclides" worden gepubliceerd.

De notulen van de jaarvergadering van 29 december 1964 worden goedgekeurd.

Het jaarverslag van de secretaris, dat van de penningmeester — welk verslag nog is samengesteld door drs. J. D. Jong —, het verslag van de kascommissie van de redactie van „Euclides" en het jaarverslag van de commissie voor de leesportefeuille worden goedgekeurd.

Hierna volgt postume décharge van de penningmeester; in de nieuwe kascommissie worden benoemd drs. A. M. Kokkelkoren en drs. M. S. R. Nihom. De periodiek aftredende bestuursleden C. J. Alders en dr. P. G. J. Vredenduin, worden herkozen.

Ter vervulling van de vacature, die ontstaan is door het overlijden van de heer de Jong, verzoekt de voorzitter aan de vergadering om tot bestuurslid te benoemen de heer drs. J. van Dormolen, Oegstgeest; de voorzitter merkt op dat in deze de door het huishoudelijk reglement voorgeschreven gang van zaken niet gevolgd is kunnen worden en beroept zich op artikel 21 van dit reglement dat bepaalt dat in gevallen waarin statuten of reglement niet voorzien of twijfel overlaten, het bestuur beslist. Bij acclamatie voldoet de vergadering aan het verzoek van de voorzitter.

De contributie voor het verenigingsjaar 1966—1967 wordt vastgesteld op *f* 9,—.

Na een kleine onderbreking voor de koffie, geeft de voorzitter het woord aan prof. dr. F. van der Blij die spreekt over *„Algebra en Analyse in de hoogste klassen van het VHMO"*; deze voordracht zal worden gepubliceerd in „Euclides".

Na deze voordracht dankt de voorzitter de spreker en verzoekt hem, 's middags gelegenheid te geven tot het stellen van vragen.

De voorzitter geeft het woord aan de heer Goote, die, verhinderd zijnde aan de middagvergadering deel te nemen, mede namens de heren Gribnau en van der Neut, dankt voor de uitnodiging tot het bijwonen van deze jaarvergadering.

Om 12.30 schorst de voorzitter de vergadering voor het diner, dat ter gelegenheid van het veertigjarig bestaan van Wimecos, aan alle aanwezigen door de vereniging wordt aangeboden.

Om 14.25 uur wordt de vergadering hervat; de voorzitter geeft het woord aan dr. P. Bronkhorst; diens voordracht, getiteld „*Spitsvondigheden in de klassieke getallentheorie*" zal in „Euclides" worden gepubliceerd.

Nadat de voorzitter de heer Bronkhorst heeft bedankt, worden aan de sprekers enige vragen gesteld en door hen beantwoord.

Van de rondvraag maakt de heer drs. P. van der Hout gebruik, om van zijn ontevredenheid over het laatste eindexamen-wiskunde blijk te geven en te informeren naar wat het bestuur in deze heeft gedaan. De voorzitter antwoordt, dat het bestuur de ontevredenheid van vele leden per brief kenbaar heeft gemaakt aan de inspectie, dat hierop geen antwoord is ontvangen, dat het Wimecosbestuur dit antwoord ook niet had verwacht omdat zijn goede verstandhouding en contact met de wiskundigen onder de inspecteurs voldoende gelegenheid hebben geboden over deze zaak van gedachten te wisselen, dat ook ervaren leraren niet alle proefwerken op zwaarte juist taxeren en dat het Wimecosbestuur zich geroepen voelt eerder te waken tegen verlaging dan tegen verhoging van het peil van het wiskundeonderwijs.

De heer G. Krooshof verzoekt om medewerking van de leraren in de wiskunde opdat het boeiende karakter en het wiskundige en didactische peil van het tijdschrift Pythagoras kan worden gehandhaafd.

De heer drs. M. J. Steenhuis merkt op dat niet alleen het diner maar ook de wijze waarop het als bij verrassing is aangeboden, bij de aanwezigen zeer in de smaak is gevallen.

De heer drs. H. C. Vernout dankt, namens de Werkgroep WVO en Liwenagel, voor de uitnodiging deze jaarvergadering bij te wonen.

Om 16.25 uur sluit de voorzitter de vergadering.

VERSLAG VAN HET VERENIGINGSJAAR
1 september 1965—31 augustus 1966.

De vereniging telde op 31 augustus 1966 661 leden.

Op 24 november 1965 ontviel aan de vereniging door de dood de penningmeester drs. J. D. de Jong. Hier moge verwezen worden naar het In Memoriam in het februarinummer van Euclides.

Op 2 november 1965 was Wimecos — en met haar andere belangstellenden uit onderwijskringen — de gast bij N.V. Philips, Eindhoven; het centrale onderwerp was de computer.

De jaarvergadering werd gehouden op 28 december 1965 in „Esplanade" te Utrecht.

Tijdens deze vergadering werd tot penningmeester benoemd drs. J. van Dormolen, Oegstgeest. De periodiek aftredende bestuursleden C. J. Alders en P. G. J. Vredenduin werden herkozen. Prof. dr. F. van der Blij hield een voordracht, getiteld: Algebra en Analyse in de hoogste klassen van het VHMO; dr. P. Bronkhorst sprak over „Spitsvondigheden in de klassieke getaltheorie". Ter gelegenheid van het 40-jarig bestaan van Wimecos bood de vereniging aan alle aanwezigen het diner aan.

Op 18 april 1966 werd in Utrecht het zestiende congres van leraren in de Wiskunde en de Natuurwetenschappen gehouden; Wimecos is een der organiserende verenigin-

gen van dit tweejaarlijkse evenement. Als thema was gekozen: De wetenschappelijke basis van de leraarsopleiding mede in verband met de ontwikkeling van de exacte wetenschappen in de twintigste eeuw.

Op 18 en 19 augustus werd te Amsterdam de vakantiecursus gehouden met als onderwerp: Zadelpuntsmethoden; deze vakantiecursus werd georganiseerd door het Mathematisch Centrum; Wimecos is vertegenwoordigd in de adviescommissie.

De Wimecos-commissie voor wiskunde van het HAVO, bestaande uit C. J. Alders, dr. A. van Dop, dr. ir. B. Groeneveld, C. de Groot en ir. C. van Vliet, is in dit jaar klaar gekomen met haar opdracht examenopgaven samen te stellen voor het eindexamen HAVO; de baten van de uitgave waarin de werkzaamheden van de commissie resulteerde, komen ten goede aan de kas van Wimecos.

De vereniging heeft zich verschillende malen doen vertegenwoordigen in vergaderingen van zusterverenigingen en commissies.

Het bestuur heeft in dit jaar vijfmaal vergaderd.

VERSLAG VAN DE KASCOMMISSIE

Oegstgeest, 22 oktober 1966

Aan
de ledenvergadering van de vereniging
WIMECOS.

Ondergetekenden, A. M. Kokkelkoren en M. S. R. Nihom, verklaren dat zij op 22 oktober 1966 de boeken van de penningmeester, J. van Dormolen, hebben gecontroleerd en in orde bevonden.

Zij spreken hun waardering uit over de efficiënte wijze waarop de boekhouding van WIMECOS wordt gevoerd en stellen de vergadering voor, de penningmeester décharge te verlenen over het in het afgelopen verenigingsjaar gevoerde beleid.

w.g. A. M. Kokkelkoren,
M. S. R. Nihom.

JAARVERSLAG VAN DE LEESPORTEFEUILLE
1965—1966

Momenteel is het ledenaantal 32 — evenals verleden jaar —. Zij betaalden aan abonnementen *f* 310.—.

De uitgaven bedroegen *f* 350.— met als grote posten: inlegvellen *f* 74.—, jaargangen inbinden *f* 26.—, jaarabonnementen *f* 204.—.

Evenals het vorige jaar is er een stijging op alle gebieden — behalve bij het lezersaantal — des te méér jammer omdat 1 februari a.s. de verzendkosten flink zullen stijgen.

Klachten over een te trage circulatie en over het verdwijnen van nummers blijven binnenkomen, maar ze zijn gelukkig sporadisch.

Het tijdschrift h (Math^a en Paed^a) is nu weer geheel in roulatie zo dat nu alle tijdschriften — met uitzondering van f (Semesterberichte) dat zeer onregelmatig verschijnt — normaal rondgaan.

Blijft — evenals vorige jaren — het voorstel: alle abonnementen op *f* 2.50 of zelfs *f* 3.— te brengen om de circulatie-kosten het hoofd te kunnen bieden.

w.g. G. J. J. Boost

BOEKBESPREKING

Dr. B. van Rootselaar and Dr. P. G. J. Vredenduin, *The use of the axiomatic method in secondary school teaching*, 32 blz., 1965;

Dr. F. Loonstra, *Programmes of mathematical university training of physicists*, 11 blz., 1966, J. B. Wolters, Groningen.

Deze rapporten van de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde dragen opvolgend de nummers 8 en 9 en zijn door de secretaris van de commissie, prof. dr. A. F. Monna te Utrecht, gratis aan alle scholen voor v.h.m.o. toegezonden.

In de inleiding van het eerste rapport wordt erop gewezen, dat de axiomatische methode in het bijzonder in het stereometrie- en mechanica-onderwijs opgeld heeft gedaan. Na de tweede wereldoorlog is echter deze methode op de middelbare school allengs op de achtergrond geraakt; bij het mechanica-onderwijs is ze zelfs geheel afgeschaft.

Het rapport bevat de volgende hoofdstukken:
(1). On the use of the axiomatic method in secondary-school teaching (Van Rootselaar);
(2). Is an axiomatic foundation of plane geometry in secondary education desirable? (Vredenduin)
(3). Formation of theories and axiomatics (Van Rootselaar en Vredenduin);
(4). Axiomatics in statistics teaching? (Molenaar)

Het onderwerp is met deze behandeling geenszins uitgeput. We blijven met belangstelling uitzien naar verslagen van didactische experimenten ten aanzien van de behandeling van onderwerpen uit de meetkunde, de groepentheorie en de vectorrekening volgens axiomatische methoden.

Vredenduin merkt in het tweede hoofdstuk op, dat hij geen voldoende gronden aanwezig ziet voor de introductie van de axiomatica in ons v.h.m.o., maar dat toch naar zijn mening aan de andere kant de eisen inzake wiskundige exactheid in ons huidig onderwijs maar al te vaak aan de lage kant zijn. Hij geeft voorbeelden van een uiterst eenvoudig axiomatisch stelsel, dat diverse interpretaties toelaat, en dat bruikbaar is in ons v.h.m.o.

Op het gymnasium bestaat naar Vredenduin's mening de mogelijkheid om een inleiding te geven tot een deductieve behandeling van de meetkunde en om de culturele betekenis van de deductieve denkwijze tot zijn recht te doen komen.

Het tweede rapport bevat een opsomming van de onderwerpen die in het eerste en in het tweede jaar van de technische hogeschool ten behoeve van natuurkundigen worden gedoceerd, verdeeld over de volgende rubrieken:
(1). analytische meetkunde en lineaire algebra;
(2). analyse en algebra;
(3). differentiaalvergelijkingen;
(4). vectoranalyse;
(5). numerieke methoden;
(6). statistiek en waarschijnlijkheidsrekening.

Voor de behandeling zijn in elk jaar 8 college-uren per week uitgetrokken en totaal 6 instructie-uren per week.

In een summiere inleiding van twee bladzijden wijst de auteur op de angelpunten die er in het wiskunde-onderwijs aan aanstaande natuurkundigen verscholen liggen.

Beide rapporten zijn ingediend op het Internationaal Mathematisch Congres te Moskou in augustus 1966.

Joh. H. Wansink

M. E. Munroe, *Introductory Real Analysis*, Addison-Wesley Publ. Co., Inc., Reading, Mass., etc., 1965, VIII+198 blz., $ 8.50.

Dit boek beoogt niet te zijn een inleiding in de analyse voor diegenen, die voor het eerst met dit vak kennis maken. Men vindt er een uiteenzetting in van die begrippen en methoden, waarvan de kennis vereist is om tot een moderne en strenge ontwikkeling van de analyse te komen.

Het eerste begrip, dat streng gefundeerd wordt, is het begrip reëel getal. De snelle weg wordt gekozen: de reële getallen zijn de elementen van een geordend lichaam, waarvoor de „stelling" van de bovenste grens geldt. Daarna volgen de elementaire topologische begrippen, die tegenwoordig een rol spelen, en een theorie van de limieten en de continuïteit. Aansluitend bij de topologie wordt de theorie van de metrische ruimte ontwikkeld.

Opvallend is, dat de schrijver niet tevreden is met het uitleggen van de betekenis van de voorkomende termen, maar dat hij er ook in slaagt te laten zien, wat de betekenis ervan is. Zo wordt duidelijk het verband uiteengezet tussen eigenschappen als het gelden van de „stelling" van de bovenste grens, het archimedisch zijn, de volledigheid, het gelden van de stellingen van Heine-Borel en van Weierstrass, compactheid en lokale compactheid van lichamen resp. metrische ruimten. Deze uiteenzettingen vond ik zeer verhelderend.

Nu volgt een theorie van de uniforme continuïteit en van de dubbele limieten. Hierbij wordt geen gebruik gemaakt van de te voren behandelde functieruimten, waardoor de behandeling daarvan enigszins in de lucht komt te hangen.

Het slothoofdstuk is getiteld „Calculus" en geeft de fundamenten van de begrippen differentiëren, differentiaal, integraal, lijn- en oppervlakte-integraal. Zeer de moeite waard is hier de uiteenzetting van de wijze, waarop de differentiaalrekening toegepast wordt in de fysica of in een willekeurige metrische ruimte. De hiertoe geschetste theorie van de „manifolds" en van de differentialen zal menigeen boeien. Jammer is, dat de schrijver door te grote preciesheid hier de eenvoud en daarmee de helderheid van zijn betoog enigszins geschaad heeft. Het integraalbegrip komt er iets mager af. Alleen de riemann-integraal komt ter sprake en weer zonder toepassing van de theorie van de functieruimten. De behandeling van de lijnintegraal daarentegen is zeer fraai.

Terecht wordt gewezen op de zwakte van de definitie van de oppervlakte door middel van een integraal. Verzuimd wordt doorgaans aan te tonen, dat de zo gegeven definitie een eenduidig resultaat geeft. De schrijver laat zien, dat dit wel zo is door een andere definitie van oppervlakte te geven, namelijk door middel van een functie met bepaalde eigenschappen, die figuren afbeeldt in de positieve reële getallen. Maar hiermee wordt de moeilijkheid verschoven, want de auteur verzuimt te bewijzen, dat er slechts één afbeelding mogelijk is, die aan de gestelde eisen voldoet.

Ik zou mijn indruk kort willen samenvatten door op te merken, dat het boek een kostelijk boek is, dat ik met groot plezier heb gelezen. Ieder, die belang stelt in het onderwerp ervan, kan ik de lectuur warm aanbevelen.

P. G. J. Vredenduin

RECREATIE

Nieuwe opgaven met oplossing en correspondentie over deze rubriek gelieve men te zenden aan Dr. P. G. J. Vredenduin, Kneppelhoutweg 12, Oosterbeek.

166. In *Mathematical Recreations* van Maurice Kraitchik vond ik het volgende probleem, dat ik hier opgeef speciaal vanwege de zeer elegante oplossing, die Kraitchik ervan geeft. Op een meisjeskostschool zijn $2n$ leerlingen. Elke middag gaan ze twee aan twee wandelen. De directrice heeft vastgesteld, dat $2n - 1$ dagen geen twee meisjes twee keer met elkaar mogen gaan wandelen. Hoe kan men een rooster opstellen om dit gedaan te krijgen? (Hoewel ik toegeef, dat het probleem in deze vorm uit de tijd is, wordt het weer actueel, als men een rooster voor een halve competitie moet samenstellen.)

167. Een middeleeuws kasteelheer wil een krijgsgevangene nog een kans geven de vrijheid te herkrijgen. Hij toont hem twee kamers in zijn kasteel en vertelt het volgende. In de ene kamer zit een tijger, in de andere mijn dochter. Voor elke kamer staat een wachter. De ene wachter spreekt altijd de waarheid, de ander liegt altijd. Welke de waarheidspreker en welke de leugenaar is, vertel ik niet. De wachters zijn niet op de hoogte van elkaars natuur. Nu mag je aan een van de beide wachters één vraag stellen, waarop het antwoord „ja" of „neen" moet luiden. Daarna mag je me aanwijzen, welke deur ik moet openen. De gevolgen worden overgelaten aan de fantasie van de lezer. Gevraagd wordt echter: welke vraag zal de gevangene stellen om zekerheid te verkrijgen aangaande de verblijfplaats van de dochter?

Opmerking. Er is veel gelijkenis met een vroegere opgave (Vijfentachtig wiskundige puzzels, nr. 3). De toevoeging, dat de wachters elkaars natuur niet kennen, maakt de vroeger gegeven oplossing onmogelijk.

(Uit: F. J. Scheid, *Elements of Finite Mathematics.*)

OPLOSSINGEN

164. Gevraagd werd de natuurlijke getallen te schrijven met hoogstens drie cijfers 4 en verder alleen mathematische symbolen (in het vorige nummer wat nader gepreciseerd).

We vermelden eerst de getallen, die met behulp van één cijfer 4 verkregen kunnen worden. Dit zijn:

$$2 = \sqrt{4}, \quad 4, \quad 24 = 4!.$$

Met twee cijfers 4 kunnen geschreven worden:

a. combinaties van twee getallen, die met behulp van één cijfer 4 geschreven kunnen worden, zoals $1 = 4/4$, $6 = 4 + 2$, $12 = 24/2$,

b. de getallen:

$$9 = \sum_{i=2}^{i=4} i, \quad 32 = \sum_{i=2}^{i=4} i!, \quad 57 = \sum_{i=2}^{i=4} \frac{(-i)^i}{i}, \quad 75 = \sum_{i=2}^{i=4} \frac{i^i}{i}, \quad 287 = \sum_{i=2}^{i=4} i^i,$$

c. sommen of verschillen van de sub b genoemde getallen, b.v.

$$50 = \sum_{i=2}^{i=4} \left(\frac{i^i - (-i)^i}{i} + i!\right),$$

d. het getal 44.

Met drie cijfers 4 kunnen geschreven worden:

a. combinaties van twee getallen, die met één en met twee cijfers 4 geschreven kunnen worden,

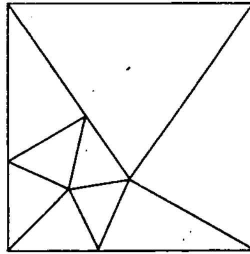
b. getallen, die men krijgt uit de hierboven onder b en c genoemde schrijfwijzen door onder het sigmateken toe te voegen „—2", „+2", „—4", „+4", „—24" of „+24", of die men krijgt door één van de sommanden met 2, 4 of 24 te vermenigvuldigen,
of door onder het sigmateken „$+i^2$", „$-i^2$", „$+2^i$" of „-2^i" toe te voegen of een i in de noemer te vervangen door i^2,
voorbeelden:
door onder het sigmateken „+2" toe te voegen, wordt het getal met 6 vermeerderd, men krijgt zo b.v. 38 en 56,
door onder het sigmateken „$i!$" te vervangen door „$2i!$" wordt het getal met 32 vermeerderd of verminderd,

c. door in een hierboven sub b of c (met twee 4'en geschreven) getal de onderste grens van het sigmateken door 1 te vervangen.

Als men niet verder dan 200 denkt te komen, kan men hiermee vrijwel volstaan. Een enkele keer heeft het zin andere grenzen voor het sigmateken te kiezen, b.v. $35 = \sum_{i=2}^{i=8} i$, $130 = \sum_{i=4}^{i=16} i$. Als afwijking vermeld ik nog: $17 = \sqrt{\sum_{i=2}^{i=4} (i^i + 2)}$.

Ik ben zo gekomen tot en met 153. Als iemand verder komt, hoor ik het graag.

165. Een vierkant kan op de volgende wijze in een minimaal aantal scherphoekige driehoeken verdeeld worden:



Ad 161. Op mijn in de oplossing gestelde vraag om opheldering deelde de heer F. Göbel te Diemen mij mede, dat het probleem algemeen opgelost is. De oplossing vindt men in Riordan, *An Introduction to Combinatorial Analysis*, uitgegeven bij Wiley.

Bovendien maakte hij me erop attent, dat ik in mijn oplossing de mogelijkheid $(0, 2^2, 0)$ vergeten had.

Overzicht van de uitgaven en inkomsten van WIMECOS gedurende het verenigingsjaar 1-9-1965 tot 1-9-1966.

Inkomsten		Uitgaven	
Giro:		Abonnementen Euclides	ƒ 3663.--
Saldo per 1-9-1965	ƒ 3067.93	Administratie en PTT	410.73
Contributies	6009.60	Prijzen en boekenbonnen	345.50
Contr. volgend ver.j.	645.25	Redactie Euclides	200.-
Onkostenvergoeding	6.46	Vergaderingen	238.20
Bank:		Reiskosten	415.56
Rente	1.18	HAVO-commissie	132.60
		Saldo giro ƒ 1209.30	
		kas 114.35	
		bank 3001.18	4324.83
	ƒ 9730.42		ƒ 9730.42

Fonds "250 Opgaven"			
Saldo op 1-9-1965	ƒ 6808.33	Vergaderingen	ƒ 1099.-
Noordhoff	959.12	Subsidie reis Moskoucongr.	750.-
Rente	48.58	Saldo	5967.03
	ƒ 7816.03		ƒ 7816.03

Op 1 september 1966 had de vereniging de volgende vorderingen:

Op het ministerie van O en W voor uitgaven van de HAVO-commissie (zie jaarverslag secretaris): ƒ 750.95.
Dit bedrag is inmiddels door het ministerie gehonoreerd.

Op vijf leden van de vereniging wegens achterstallige contributie over het verenigingsjaar 1965-1966: ƒ 45.-
Hiervan is inmiddels ƒ 36.- betaald.

Utrecht, 28 december 1966